

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Рабочая тетрадь

по курсу

“Числовые и функциональные ряды”

Практикум по математике
для студентов очной формы обучения

студента *второго* курса _____ группы

Ф.И.О.

Рязань

2020

Рецензент: Мамонов С.С., доктор физ.-мат. наук,
профессор кафедры математики и методики
преподавания математических дисциплин
Рязанского государственного университета
им. С.А. Есенина

Тихонова О.В. Рабочая тетрадь по курсу “Числовые и функциональные ряды”. Практикум по математике для студентов бакалавриата очной формы обучения всех направлений подготовки. – Рязань: Рязанский институт (филиал) Московского политехнического университета, 2020. – 40 с.

Рабочая тетрадь предназначена для студентов бакалавриата дневного отделения 2 курса всех направлений подготовки. Данное пособие содержит материал для проведения практических занятий и для организации самостоятельной работы студентов.

Печатается по решению методического совета Рязанского института (филиала) Московского политехнического университета.

© Рязанский институт (филиал)
Московского политехнического университета
2020

© О.В. Тихонова,
2020

Занятие 1. Числовой ряд. Необходимый признак сходимости.

Признаки сравнения.

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Сформулируйте определение числового ряда.
2. Что называется частичной суммой ряда?
3. При каком условии ряд называется сходящимся? расходящимся?
4. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда.
5. При каком условии ряд называется знакоположительным? знакоотрицательным? знакопостоянным?
6. Сформулируйте первый и второй признаки сравнения числовых рядов

1.1. Для каждого ряда

- 1) написать формулу частичной суммы S_n ;
- 2) найти $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ или доказать, что этот предел не существует;
- 3) сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.
 - а) $1+3+5+\dots+(2n-1)+\dots$

б) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

В) $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots$

1.2. Найти предел при $n \rightarrow \infty$ общего члена ряда a_n . Проверить выполнение необходимого признака сходимости ряда.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\ln(n+1)}$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2}$$

$$\text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+2)^3}$$

$$\text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$$

1.3. Применяя первый признак сходимости, исследовать на сходимость

ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n}$

в) $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \dots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \dots$

1.4. Исследовать ряд на сходимость, применяя второй признак сравнения:

а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1}$$

б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^6+2n}-2}$$

в)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cdot \ln \frac{n+1}{n}$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3}{5^n + 2}$$

1.5. Исследовать ряд на сходимость

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n+1}{(n+2)n} + \dots$$

1.6. Исследовать ряд на сходимость, применяя первый признак сравнения:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n + 1}{n^2}$ (Указание: сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} + 1}{n^2}$)

1.7. Исследовать ряд на сходимость, применяя второй признак сравнения:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n^3 + n - 1}$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n + \sqrt[3]{n^5}}$$

Занятие 2. Признаки Коши и Даламбера. Интегральный признак сходимости ряда.

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Сформулируйте признаки сходимости Даламбера и Коши.
2. Сформулируйте интегральный признак сходимости ряда с положительными членами.

2.1. Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^{n+1}}$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\text{г) } \sin \frac{\pi}{2} + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \dots + n^2 \sin \frac{\pi}{2^n} + \dots$$

2.2. Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Коши:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1} \right)^{3n+1}$

б) $\frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9} + \dots + \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} + \dots$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$$

2.3. Исследовать ряд на сходимость, применяя интегральный признак:

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

$$\mathfrak{6}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(3n-1)}$$

$$\mathbf{B}) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^2$$

2.4. Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Даламбера:

а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n \cdot n^4}$$

б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \dots (3n-2)}{n! \cdot 2^n}$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! \cdot 2^n}{(2n)!}$$

2.5. Исследовать ряд на сходимость, применяя признак Коши:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n} \right)^n$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

2.6. Исследовать ряд на сходимость, применяя интегральный признак:

$$\text{а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{\ln n}}$$

$$\text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln^2(2n+1)}$$

Занятие 3. Знакопередающие ряды.

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Какой ряд называется знакопередающимся? знакопеременным?
2. Сформулируйте признак Лейбница.
3. При каком условии знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся? условно сходящимся?

3.1. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^n}$

$$\mathbf{B)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{5n^2 - 2}$$

$$\mathbf{r)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n^2}$$

$$\text{е) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 6n + 10}$$

3.2. Доказать, что ряд сходится условно:

а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+2)}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$$

3.3. Доказать, что ряд сходится абсолютно:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-2)!}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$$

3.4. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2 - 1}{5 + 2n^2}$ расходится.

Занятие 4. Степенные ряды. Разложение функций в степенные ряды.

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Какой ряд называется функциональным? степенным?
2. Дайте определение области сходимости функционального ряда.
3. Сформулируйте определение радиуса сходимости степенного ряда.
4. Запишите формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда:
5. Запишите формулы разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора и в ряд Маклорена:
6. Сформулируйте достаточное условие разложимости функций в ряд Тейлора.

4.1. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+1)}$

$$\mathbf{B)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-3)^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$\Gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{3^n(n+2)}$$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}$$

4.2. Найти область сходимости ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$$

$$\mathfrak{6)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$$

4.3. Разложить в ряды по степеням x следующие функции:

а) $f(x) = 3^x$

б) $f(x) = \cos^2 x$

4.4. Функцию $f(x) = \frac{1}{1-x}$ разложить в ряд Тейлора по степеням

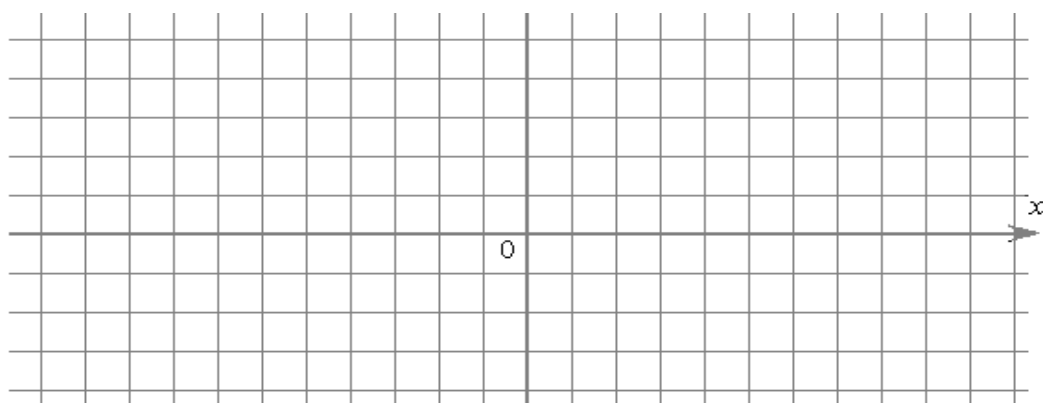
а) x ; б) $x+1$.

Занятие 5. Ряды Фурье.

Вопросы для подготовки к занятию:

1. Какой ряд называется рядом Фурье? Запишите его общий вид:
2. Запишите формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье:
3. Запишите формулу разложения в ряд Фурье четной функции:
4. Запишите формулу разложения в ряд Фурье четной функции:

5.1.Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ ($-\pi < x < \pi$)

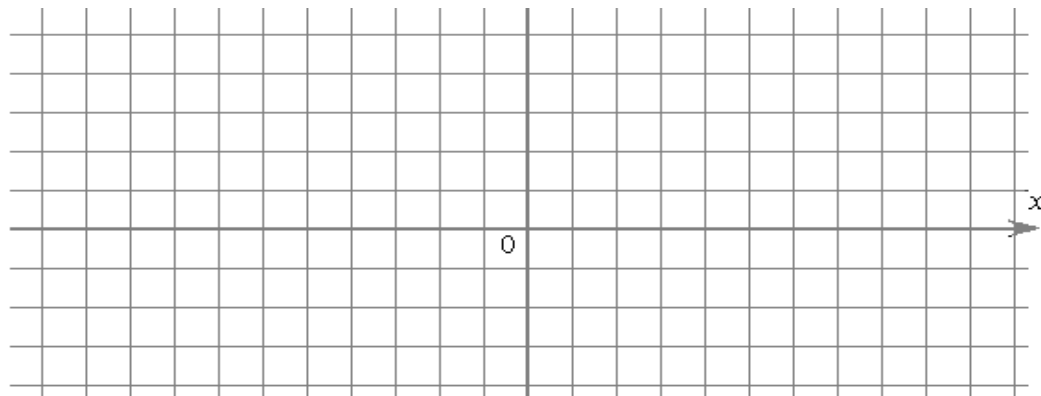


5.2.Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$, заданную на интервале $(0; 2\pi)$.



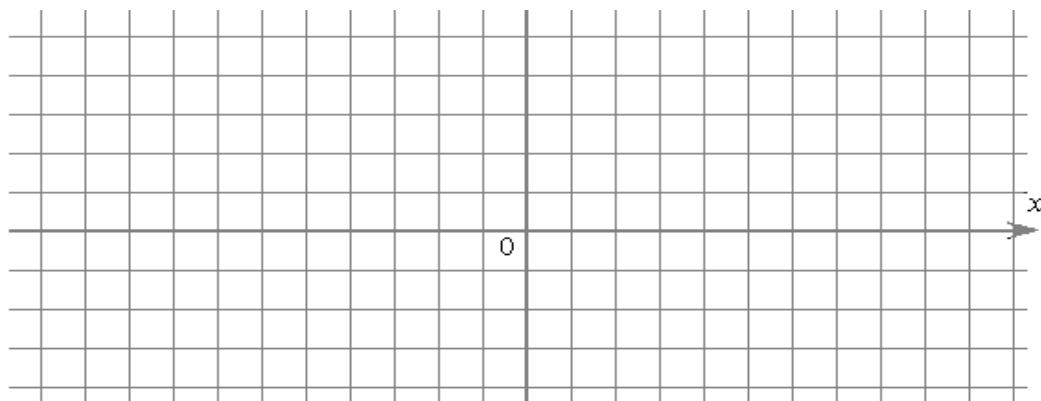
5.3.Разложить в ряд Фурье по косинусам на отрезке $[0; \pi]$ функцию

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}.$$



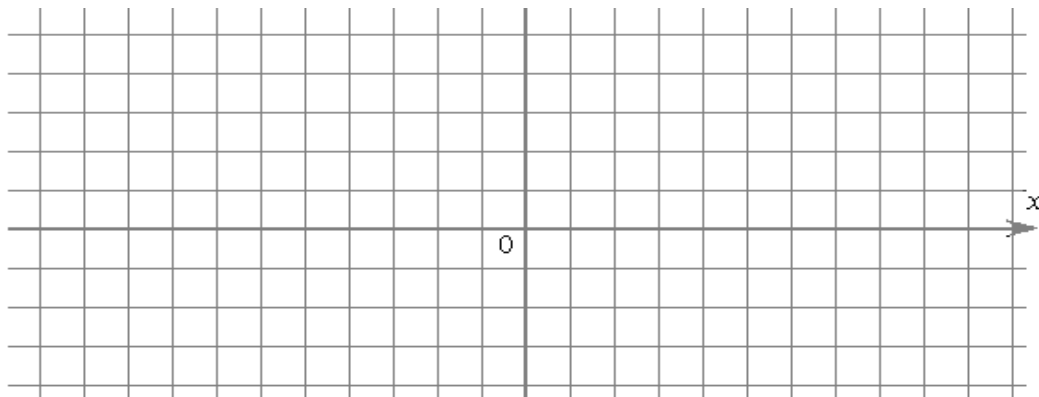
5.4. Разложить в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0; \pi]$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

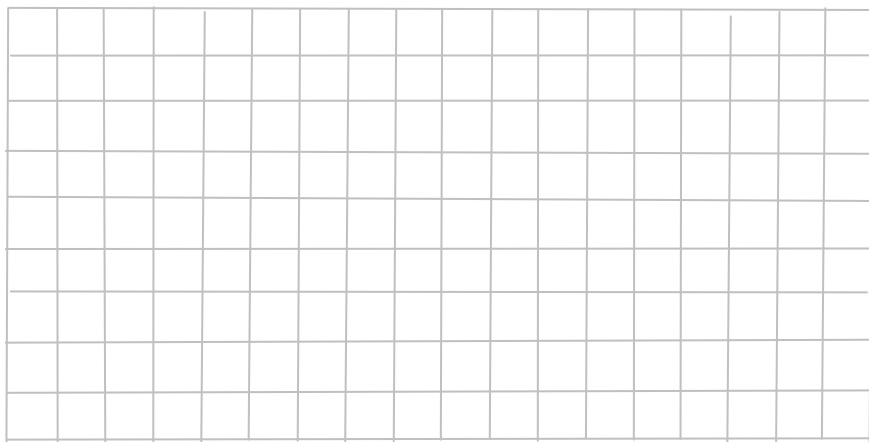


5.5. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -\pi < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$$



5.6.Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2$, заданную на интервале $[-\pi; \pi]$.



5.7.Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2$, заданную на интервале $(0; 2\pi)$.

